

不确定时延网络控制系统的建模与稳定性分析

马伟豪, 金朝永

(广东工业大学 应用数学学院, 广东 广州 510090)

摘要: 针对不确定时延的网络控制系统, 传感器采用时间驱动, 控制器和执行器采用事件驱动, 将系统建模为一类不确定性的线性离散系统. 通过构造李雅普诺夫函数, 结合线性矩阵不等式 (LMI) 的有关知识, 对系统的稳定性进行分析, 给出了系统稳定的充分条件. 给出算例, 用 MATLAB 进行仿真, 证明了结论的有效性.

关键词: 网络控制系统; 线性矩阵不等式; 稳定性; 不确定时延

中图分类号: TP273

文献标识码: A

文章编号: 1007-7162(2010)03-0027-04

网络控制系统 NCS (Networked Control Systems, NCS), 是指传感器、控制器、执行器通过网络构成的闭环反馈控制系统. NCS 是集通信网络和控制技术于一体的复杂的控制系统. 在 NCS 中, 传感器、控制器、执行器通过网络进行数据传送、交换, 由于网络环境的影响或是通信协议的不同, 往往会导致数据的传输出现时延、错序、丢包等问题.

NCS 的研究起始于 20 世纪 80 年代末 Ray 等关于集成通信控制系统的研究. 20 世纪 90 年代, NCS 迅速应用于国防、航空航天、设备制造、过程控制、远程控制以及经济管理等领域. 我国 NCS 的研究起始于 20 世纪 90 年代末现场总线控制系统 (FCS) 在工业控制领域的应用.

文献 [1] 对 NCS 研究现状进行了介绍, 并对 NCS 的前景进行了展望. 网络的时延问题是 NCS 的基本问题, 文献 [2-3] 分析了带有数据包丢失和时延的 NCS 的稳定性. 文献 [4] 对具有马尔可夫时延的 NCS 进行了建模与稳定性分析. 文献 [5] 针对 MIMO 网络控制系统的最大允许时延进行了研究. 根据网络时延的长短, 可分为长时延 NCS、短时延 NCS 和不确定时延 NCS. 当信号的传输时延小于一个采样周期时成为短时延 NCS. 朱其新等 [6] 对长时延 NCS 的稳定性进行了分析与研究. 邱占芝等 [7] 对不确定时延的 NCS 的保性能控制进行了研究. 此外, 文献 [8] 提出了一种基于时延预估补偿控制的闭环实时控制方法. 文献 [9] 研究了不确定时延 NCS 的鲁棒稳定性.

本文针对一类时变不确定时延被控对象的 NCS

进行了稳定性分析, 在文献 [9] 建立的模型的基础上, 给出了系统新的稳定的充分条件, 最后给出算例, 用 MATLAB 进行数值仿真, 验证了所得的结论.

本文采用符号说明: $\mathbf{R}^n$ 表示 n 维实空间, $\mathbf{R}^{n \times n}$ 表示 $n \times n$ 维实数矩阵, $\mathbf{A} > 0$ 表示为正定矩阵; 矩阵 $\mathbf{A}^T$ 表示 $\mathbf{A}$ 的转置, $\mathbf{I}$ 为适当维数单位矩阵; $*$ 表示所在矩阵的主对角对称部分.

1 模型的建立

为了描述方便, 建立 NCS 典型的结构示意图如图 1 所示.

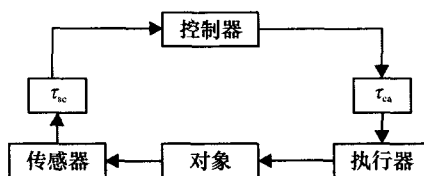


图 1 NCS 结构示意图

图 1 中 τ_{ca} 为控制器到执行器的传输时延, τ_{sc} 为传感器到控制器的传输时延. 由于控制器一般为计算机, 控制器运算速度很高, 因此控制信号的计算时间一般忽略不计, 如果控制器的计算时延不可忽略, 则将其并入 τ_{ca} 一起考虑.

为了建立模型的方便, 对图 1 所表示的系统做如下假设:

- (1) 传感器采用时钟驱动, 采样周期为 T ($T > 0$), 控制器和执行器采用事件驱动.
- (2) 数据的传送是单包传送, 数据在传输过程中不考虑数据丢包和错序.

(3) 数据的传输过程存在不确定时延,但是大小 $\tau = \tau_{ca} + \tau_{sc}$ 不超过一个采样周期,即 $\tau \in [0, T]$.

上述假设符合大部分控制网络的实际情况,专门为控制设计的网络如 CAN 网络满足以上假设.

在 NCS 中,第 k 个周期时延 $\tau_k \in [0, T]$,因此在一个周期之内,系统的输入不是恒定值,而是一个分段的常值. 在一个周期内控制输入可以表示为

$$u(t) = \begin{cases} u(k-1), & t_k < t \leq t_k + \tau_k, \\ u(k), & t_k + \tau_k < t \leq t_k + T. \end{cases}$$

考虑线性时不变被控对象,模型可以表示为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_w w(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中, $x \in R^n$ 为被控对象的状态, $u \in R^m$ 为被控对象输入, $y \in R^r$ 为系统输出. $w(t)$ 为有限能量的所有外部扰动, A, B, C, B_w 为适当维数的矩阵.

对系统(1)离散化可得被控对象的离散模型为

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_{d0}(\tau_k) u_k + B_{d1}(\tau_k) u_{k-1} + B_{dw} w_k, \quad (2)$$

其中:

$$A_d = e^{AT};$$

$$B_{d0}(\tau_k) = \int_0^{T-\tau_k} e^{As} B ds;$$

$$B_{d1}(\tau_k) = \int_{T-\tau_k}^T e^{As} B ds;$$

$$B_{dw} = \int_0^T e^{As} B ds.$$

由于 τ_k 的时变性,因此 $B_{d1}(\tau_k)$ 也是随时间变化的. 从而 NCS 的模型最终就转化为一个具有时变参数的线性离散系统.

由文献[9]可以得到系统(2)的等价系统模型

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_d x_k + (B_0) + DF(\tau_k) E u_k + \\ (B_1 - DF(\tau_k) E) u_{k-1} + B_{dw} w_k, \\ y_k = C x_k. \end{cases} \quad (3)$$

其中: $A_d, B_{dw}, B_0, B_1, C, D, E, H$ 为定常矩阵, $F(\tau_k)$ 为不确定矩阵,且满足 $F(\tau_k)^T F(\tau_k) \leq I$. $A_d, B_{dw}, B_0, B_1, D, E, F(\tau_k)$ 的计算方法及表达式见文献[9].

2 假设稳定性分析

引理1 (Schur 补) 对给定的常数矩阵 $A, P = P^T > 0, Q = Q^T$, 则 $A^T P A + Q < 0$ 成立, 当且仅当 $\begin{pmatrix} -P^{-1} & A \\ A^T & Q \end{pmatrix} < 0$ 或者 $\begin{pmatrix} Q & A^T \\ A & -P^{-1} \end{pmatrix} < 0$ 成立, 则有

$A^T P A + Q < 0$ 成立.

引理2 对于实矩阵 W, M, N 和 $F(k)$, 其中 W 对称, 不等式

$$W + MF(k)N + N^T F^T(k)M^T < 0$$

对任意满足 $F(\tau_k)^T F(\tau_k) \leq I$ 的 $F(k)$ 都成立, 当且仅当存在标量 $\varepsilon > 0$, 使得

$$W + \varepsilon M M^T + \varepsilon^{-1} N^T N < 0.$$

定理1 假设系统

$$x_{k+1} = A_d x_k + (B_0 + DF(\tau_k) E) u_k + (B_1 - DF(\tau_k) E) u_{k-1} + B_w w_k \quad (4)$$

描述的系统状态可测, 当系统的外部扰动为零时, 控制律为 $u(k) = Kx(k)$, 若存在对称正定矩阵 P, Q 和常数 $\varepsilon > 0$, 以及状态反馈增益矩阵 K , 使得

$$\begin{bmatrix} \varepsilon D D^T - P^{-1} & A_d + B_0 K & B_1 K & 0 \\ * & -P + Q & 0 & E K^T \\ * & * & -Q & (-E K)^T \\ * & * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0, \quad (5)$$

则闭环系统(4)是渐近稳定的.

证明 选取如下李雅普诺夫函数

$$V_k(x) = V_{k1}(x) + V_{k2}(x),$$

$$V_{k1}(x) = x_k^T P x_k,$$

$$V_{k2}(x) = x_{k-1}^T Q x_{k-1},$$

只要证明 $\Delta V_k(x) < 0$, 本题即得证.

$$\Delta V_k(x) = V_{k+1}(x) - V_k(x) = x_{k+1}^T P x_{k+1} - x_k^T P x_k + x_k^T Q x_k - x_{k-1}^T Q x_{k-1}. \quad (6)$$

将式(4)代入式(6)得到

$$\begin{aligned} & x_k^T \Omega^T P \Omega x_k + x_k^T \Omega^T P \Theta x_{k-1} + x_{k-1}^T \Theta^T P \Omega x_k + \\ & x_{k-1}^T \Theta^T P \Theta x_{k-1} + x_k^T Q x_k - x_k^T P x_k - x_{k-1}^T Q x_{k-1} = \\ & (x_k^T, x_{k-1}^T) \sum \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)中

$$\sum = \begin{pmatrix} \Omega^T P \Omega - P + Q & \Omega^T P \Theta \\ * & \Theta^T P \Theta - Q \end{pmatrix},$$

$$\Omega = A_d + B_{d0} K + D F E K,$$

$$\Theta = B_{d1} K - D F E K,$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon D D^T - P^{-1} & A_d + B_0 K & B_1 K & 0 \\ * & -P + Q & 0 & (E K)^T \\ * & * & -Q & (-E K)^T \\ * & * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0.$$

要使 $\Delta V_k(x) < 0$, 只需要满足

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Omega^T P \Omega - P + Q & \Omega^T P \Theta \\ * & \Theta^T P \Theta - Q \end{pmatrix} < 0. \quad (8)$$

将式(8)转化为满足引理1的形式

$$\begin{bmatrix} -P+Q & 0 \\ * & -Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega^T \\ \Theta^T \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} \Omega & \Theta \end{bmatrix} < 0. \quad (9)$$

继续对式(9)进行变形得

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & A_d + B_0 K & B_1 K \\ * & -P+Q & 0 \\ * & * & -Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F \begin{bmatrix} 0 & EK & -EK \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & EK & -EK \end{bmatrix}^T F^T \begin{bmatrix} D^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} < 0. \quad (10)$$

由引理2可得式(10)等价于:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon D D^T - P^{-1} & A_d + B_0 K & B_1 K \\ * & -P+Q & 0 \\ * & * & -Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & EK & -EK \end{bmatrix}^T (\varepsilon^{-1}) \begin{bmatrix} 0 & EK & -EK \end{bmatrix} < 0. \quad (11)$$

将式(11)的矩阵相加即可得到式(5). 由 $V_k(x) > 0$ 和 $\Delta V_k(x) < 0$ 可知闭环系统(4)渐近稳定.

3 数值仿真

考虑系统

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 3 & 1.5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.4 \end{bmatrix} u(t),$$

取采样周期为 0.1 s, 假定网络中的传输时延 $\tau_k \in [0, T]$, 并且是时变的. 对上述系统进行离散化处理, 可得式(4)所示的离散化系统. 为了保证 $F(\tau_k)^T F(\tau_k) \leq I$, 即 $e^{\lambda_i(T-\tau_k-\alpha_i)} < 1$, 在这里取 $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0.1$. 则利用 MATLAB 中的 LMI 工具箱可以求得:

$$B_0 = \begin{bmatrix} -1.6000 \\ -2.9333 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1.6820 \\ 2.9821 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1.1663 \\ -0.1488 & 1.7494 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} -.8000 \\ 1.4422 \end{bmatrix},$$

$$F(\tau_k) = \begin{bmatrix} 1/2 * e^{0.9-\tau_k} & 0 \\ 0 & -2e^{\tau_k} \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 69.8066 & 22.6863 \\ 22.6863 & 88.9579 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 34.9033 & 11.3432 \\ 11.3432 & 44.4789 \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon = 16.6785.$$

由上述结果可知, 存在正定的 P, Q 和正数 ε 使得式(4)成立. 因此系统是稳定的, 在采样周期为 0.1 s 时, 可得满足式(4)状态反馈控制律

$$u_k = [-3.125, 0] x_k.$$

当系统的初始状态 $[x_1, x_2]^T = [1.5, -1]^T$ 时, 可得状态响应曲线如图2所示.

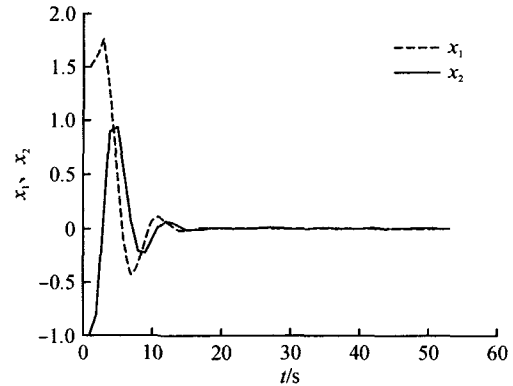


图2 系统状态响应曲线

从图2可以看出, 定理1给出的充分条件可以保证系统渐近稳定. 因此, 该充分条件是有效的.

4 结语

网络系统中存在不确定的时延, 针对系统中存在时延的情况, 在不考虑数据丢包的情况下, 假设系统的状态可测, 系统的采样周期是不确定的, 但是小于一个采样周期. 根据假设建立了 NCS 的模型, 然后将其离散化为一类线性离散时延系统, 利用李雅普诺夫函数和 LMI 的相关理论给出了系统渐近稳定的充分条件. 最后通过仿真实例说明了该方法的有效性和可行性.

参考文献:

- [1] 张庆灵, 张雪峰. NCS 研究综述与前景展望[J]. 信息与控制, 2007, 36(3): 364-370.
- [2] Zhang Wen-An, Li Yu. Modelling and control of networked control systems with both networked induced delay and

- packet dropout[J]. Automatic, 2009, 45(5): 2440-2445.
- [3] Matias Garcia-Rivera, Antonio barreiro. Analysis of networked control systems with drops and variable delays[J]. Automatic, 2007, 43(6): 2054-2059.
- [4] 杨春曦, 关治洪, 黄剑. 马尔可夫时滞 NCS 的稳定性[J]. 华中科技大学学报: 自然科学版, 2009, 37(3): 86-89.
- [5] 郑萌, 张庆灵, 宋敏, 等. 网络控制系统最大允许时延界[J]. 控制理论与应用, 2008, 25(6): 1128-1130.
- [6] 朱其新, 胡寿松, 侯霞. 长时滞 NCS 的随机定性研究[J]. 东南大学学报: 自然科学版, 2003, 33(3): 368-371.
- [7] 邱占芝, 张庆灵, 刘明. 不确定时延输出反馈网络化系统性能控制[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(2): 274-278.
- [8] 张俊, 刘克, 薛燕. 基于时延预估的 NCS 研究[J]. 控制工程, 2007, 14(1): 82-85.
- [9] 谢成祥, 樊卫华. 一类短时延 NCS 的建模和控制方法[J]. 南京理工大学学报: 自然科学版, 2009, 3(2): 156-160.

Modeling and Control Method of Networked Control System with Uncertain Time-delay

Ma Wei-hao, Jin Chao-yong

(Faculty of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090, China)

Abstract: Considering the uncertain delay of networked control systems (NCS), with the sensor node of NCS time-driven, and actuator and controllers event-driven, the networked control systems was modeled as an uncertain discrete liner system. Then it constructed one Lyapunov function, using the relevant knowledge of liner matrix inequalities (LMIs), analyzing the stability of the system, and giving one sufficient condition for system stability. At last, an example was given. The simulation results verify the effectiveness of the method.

Key words: networked control systems (NCS); liner matrix inequality; stability; uncertain delay

(上接第 21 页)

Perturbation Bounds for Positive Semi-definite Factors of Extended Matrix

Wen Wei

(Basic Courses Department, Maoming Vocational and Technical College, Maoming 525000, China)

Abstract: The positive semi-definite factors of the extended matrix $R_k(A)$, whose mother matrix is A , and its perturbation matrix $\tilde{R}_k(A)$ are H and $\tilde{H}$ respectively. By means of singular value decomposition, the perturbation bounds for positive semi-definite factors of extended matrix $R_k(A)$ are deduced under Frobenius norm.

Key words: positive semi-definite factor; extended matrix; Frobenius norm; singular decomposition; perturbation bound